

PRAKTICKÝ PŘÍKLAD NA MINIMALIZACI NÁKLADŮ PŘI VÝROBĚ



Firma zabývající se výrobou světlometů do aut dostala zakázku na výrobu 3 druhů světlometů do aut, respektive do Škody Fabia, Octavia a Superb. Uzavřela smlouvu na dodávku 5 000 párů – 10000 ks světlometů do Fabie, na 7500 párů – 15000 ks světlometů do Octavie a 2500 párů – 5000 ks do Superbu. Výroba bude probíhat v průběhu dvou čtvrtletí a odběratelem bude odebrána jako celek na konci celého období.

Z technologického hlediska je zapotřebí na výrobu jednoho světlometu:

	počet hodin práce	množství plastu (kg)	množství čírého plastu (kg)
Škoda FABIA	3	1	0,5
Škoda OCTAVIA	3,5	1,5	0,7
Škoda SUPERB	4	1,7	0,9

V prvním čtvrtletí (letní období) má firma k dispozici 40000 hodin práce, 35000 kg plastu a čírého plastu 6000 kg. V druhém čtvrtletí má k dispozici 70000 hodin práce a 20000 kg plastu a 15000 kg s tím, že nespotřebovaný materiál v prvním čtvrtletí může být použit pro výrobu ve druhém čtvrtletí, v takovém případě však musí firma k celkovým nákladům přičíst skladovací náklady, které činí 3 Kč na 1 kg. Ostatní doprovodné suroviny jsou firmě dodávány denně dle potřeby výroby, jejich cena je započtena do nákladů na výrobu světlometů.

Výrobky vyrobené v prvním čtvrtletí budou odběratelem odebrány až na konci druhého čtvrtletí v rámci celé zakázky – skladovací náklady pro tyto výrobky jsou 40 Kč za jeden světlomet do Fabie, 50 Kč za jeden světlomet do Octavie a 55 Kč za jeden světlomet do Superbu.

Kalkulace nákladů (materiál + práce) na výrobu jednoho světlometu do Fabie je v prvním čtvrtletí 1000 Kč a ve druhém čtvrtletí 1200 Kč. Pro světlomet do Octavie je tato kalkulační 1200 Kč v prvním čtvrtletí a 1700 Kč ve čtvrtletí druhém. Pro světlomet do Superba je tato kalkulační 1500 Kč v prvním čtvrtletí a 2000 Kč ve čtvrtletí druhém.

Cílem úlohy je stanovit výrobní strategii v obou čtvrtletích tak, aby byly minimalizovány celkové náklady na výrobu.

Nejdříve provedeme analýzu úlohu. V této úloze je analýza složitější, a proto si vypomůžeme matematickým modelem. Jako neznáme veličiny si v matematickém modelu zvolíme následující proměnné:

- x_1 - počet ks světlometů FABIA vyrobených v prvním čtvrtletí
- x_2 - počet ks světlometů FABIA vyrobených v druhém čtvrtletí
- x_3 - počet ks světlometů OCTAVIA vyrobených v prvním čtvrtletí
- x_4 - počet ks světlometů OCTAVIA vyrobených v druhém čtvrtletí
- x_5 - počet ks světlometů SUPERB vyrobených v prvním čtvrtletí
- x_6 - počet ks světlometů SUPERB vyrobených v druhém čtvrtletí

Omezující podmínky modelu budou vyjadřovat především bilanci mezi kapacitou suroviny a práce a spotřebou těchto zdrojů v obou čtvrtletích :

1. Spotřeba práce nemůže přesáhnout počet hodin, které jsou k dispozici v obou čtvrtletích :

$$3x_1 + 3,5x_3 + 4x_5 \leq 40000$$

$$3x_2 + 3,5x_4 + 4x_6 \leq 70000$$

2. Spotřeba plastů nemůže být větší než kapacita, která je v daném čtvrtletí k dispozici. Pro první čtvrtletí budou podmínky ve tvaru:

$$1x_1 + 1,5x_3 + 1,7x_5 \leq 35000$$

$$0,5x_1 + 0,7x_3 + 0,9x_5 \leq 6000$$

Kapacitu ve druhém čtvrtletí je třeba zvýšit o nespotřebovaný počet kg plastů v prvním čtvrtletí. To vyjádříme podmínkami:

$$1x_2 + 1,5x_4 + 1,7x_6 \leq 20000 + (35000 - 1x_1 - 1,5x_3 - 1,7x_5)$$

$$0,5x_2 + 0,7x_4 + 0,9x_6 \leq 15000 + (6000 - 0,5x_1 - 0,7x_3 - 0,9x_5)$$

Nerovnice po úpravě do běžného tvaru:

$$1x_1 + 1x_2 + 1,5x_3 + 1,5x_4 + 1,7x_5 + 1,7x_6 \leq 55000$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,7x_3 + 0,7x_4 + 0,9x_5 + 0,9x_6 \leq 21000$$

3. Podmínky vyjadřující nutnost splnění požadavků odběratele. tj. 10000 ks FABIA, 15000 ks OCTAVIA a 5000 ks SUPERB:

$$x_1 + x_2 = 10000$$

$$x_3 + x_4 = 15000$$

$$x_5 + x_6 = 5000$$

Všechna tato omezení zapíšeme pomocí soustavy nerovnic a rovnic :

$$3x_1 + 3,5x_3 + 4x_5 \leq 40000$$

$$3x_2 + 3,5x_4 + 4x_6 \leq 70000$$

$$1x_1 + 1,5x_3 + 1,7x_5 \leq 35000$$

$$0,5x_1 + 0,7x_3 + 0,9x_5 \leq 6000$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1,5x_3 + 1,5x_4 + 1,7x_5 + 1,7x_6 \leq 55000$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,7x_3 + 0,7x_4 + 0,9x_5 + 0,9x_6 \leq 21000$$

$$x_1 + x_2 = 10000$$

$$x_3 + x_4 = 15000$$

$$x_5 + x_6 = 5000$$

4. Dále musíme zadat podmínky nezápornosti, které zajistí, aby počty vyrobených světlometů nemohli být záporné:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

$$x_5 \geq 0$$

$$x_6 \geq 0$$

Tyto podmínky lze zapsat zkráceně ve tvaru:

$$x_j \geq 0,$$

pro $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Účelová funkce matematického modelu bude vyjadřovat minimalizaci celkových nákladů. Náklady je třeba rozdělit na přímé náklady, vyjádřené uvedenou kalkulací, skladovací náklady výrobků vyrobených v prvním čtvrtletí a skladovací náklady materiálu (plastu), který nebyl v prvním čtvrtletí spotřebován. Tyto tři části účelové funkce mají následující podobu :

- přímé náklady

$$1000x_1 + 1200x_2 + 1200x_3 + 1700x_4 + 1500x_5 + 2000x_6$$

- skladovací náklady výrobků

$$45x_1 + 50x_3 + 55x_3$$

- skladovací náklady nespotřebovaného materiálu v prvním čtvrtletí

$$3(35000 - 1x_1 - 1,5x_3 - 1,7x_5)$$

$$3(6000 - 0,5x_1 - 0,7x_3 - 0,9x_5)$$

Po sečtení všech tří částí a po příslušné úpravě dostaneme výpočetní tvar účelové funkce :

$$\min z = 1035,5x_1 + 1200x_2 + 1243,4x_3 + 1700x_4 + 1500x_5 + 2047,2x_6 + 105000 + 18000$$

Pro výpočet optimálního výrobního programu si údaje o výrobě zadáme do tabulky v Excelu. Soubor nazveme „světla“.

Dále si vytvoříme v Excelu takovouto tabulku:

Při tvorbě tabulky je nutné nastavit v řádku optimální výroby a ve sloupci skutečné spotřeby (zde je tato nutnost vztahována hlavně na oblast \$I\$8:\$I\$10) nulový počet desetinných míst.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Světlomety FABIA I. čtvrt	Světlomety FABIA II. čtvrt	Světlomety OCTAVIA I. čtvrt	Světlomety OCTAVIA II. čtvrt	Světlomety SUPERB I. čtvrt	Světlomety SUPERB II. čtvrt	Maximální hodnota	Skutečná spotřeba
2	Spotřeba práce v I. čtvrt	3		3,5		4		40000	
3	Spotřeba práce v II. čtvrt		3		3,5		4	70000	
4	Spotřeba plastu v I. čtvrt	1		1,5		1,7		35000	
5	Spotřeba plastu v II. čtvrt	1	1	1,5	1,5	1,7	1,7	55000	
6	Spotřeba čírého plastu v I. čtvrt	0,5		0,7		0,9		6000	
7	Spotřeba čírého plastu v II. čtvrt	0,5	0,5	0,7	0,7	0,9	0,9	21000	
8	Požadavek na Světlomet Fabia (ks)	1	1					10000	
9	Požadavek na Světlomet Octavia (ks)			1	1			15000	
10	Požadavek na Světlomet Superb (ks)					1	1	5000	
11	Náklady (Kč)	1035,5	1200	1243,4	1700	1547,2	2000	Min	
12	Optimální výroba								

Do tabulky jsme zadali všechny potřebné údaje na základě vstupních hodnot. Je sestavena tak, aby šlo z výhodou využít kopírování vzorců. Do tabulky jsme rovnou zadali i řádek **Optimální výroba**, který představuje dosud neznámé množství světlometů, které se má vyrobit (v matematickém modelu to jsou neznámé x_1 , x_2 , x_3 a x_4). Jsou to buňky B11, C11, D11, E11, F11 a G11 které odpovídají počtu kusů světlometů na všechny tři typy aut a obou čtvrtletích. Dále jsme zadali sloupec **Skutečná spotřeba**, do kterého bude spočítána skutečná spotřeba práce a obou plastů. Současně budou spočítány i **celkové náklady na výrobu**.

Pro vyřešení úlohy nástrojem **Řešitel** musíme nejdříve zadat potřebné vzorce do příslušných buněk ve sloupci **Skutečná spotřeba**. Jsou to vzorce, pomocí kterých bude spočítána skutečná spotřeba práce a plastů v jednotlivých čtvrtletích, splnění požadavku odběratele na světlomety a celkové náklady na výrobu.

VZOREC	BUŇKA KAM JE VZOREC ZAPSÁN
=B2*\$B\$12+C2*\$C\$12+D2*\$D\$12+E2*\$E\$12+F2*\$F\$12+G2*\$G\$12	I2
=B3*\$B\$12+C3*\$C\$12+D3*\$D\$12+E3*\$E\$12+F3*\$F\$12+G3*\$G\$12	I3
=B4*\$B\$12+C4*\$C\$12+D4*\$D\$12+E4*\$E\$12+F4*\$F\$12+G4*\$G\$12	I4
=B5*\$B\$12+C5*\$C\$12+D5*\$D\$12+E5*\$E\$12+F5*\$F\$12+G5*\$G\$12	I5
=B6*\$B\$12+C6*\$C\$12+D6*\$D\$12+E6*\$E\$12+F6*\$F\$12+G6*\$G\$12	I6
=B7*\$B\$12+C7*\$C\$12+D7*\$D\$12+E7*\$E\$12+F7*\$F\$12+G7*\$G\$12	I7
=B8*\$B\$12+C8*\$C\$12+D8*\$D\$12+E8*\$E\$12+F8*\$F\$12+G8*\$G\$12	I8
=B9*\$B\$12+C9*\$C\$12+D9*\$D\$12+E9*\$E\$12+F9*\$F\$12+G9*\$G\$12	I9
=B10*\$B\$12+C10*\$C\$12+D10*\$D\$12+E10*\$E\$12+F10*\$F\$12+G10*\$G\$12	I10

Dále zadáme vzorec pro výpočet celkových nákladů do buňky I11:

$$=B11*\$B\$12+C11*\$C\$12+D11*\$D\$12+E11*\$E\$12+F11*\$F\$12+G11*\$G\$12+105000+18000$$

Nyní je tabulka hotova nastavíme vlastnosti řešitele. Jako řešení minimální nákladů bude buňka \$I\$11, rovno je Minimu. Jako měněné buňky jsou \$B\$12, \$C\$12, \$D\$12, \$E\$12, \$F\$12, \$G\$12 pro jejich zadání nám poslouží oblast buněk.

Je zde několik omezujících podmínek:

1. Měněné buňky nesmí být menší jak nula.

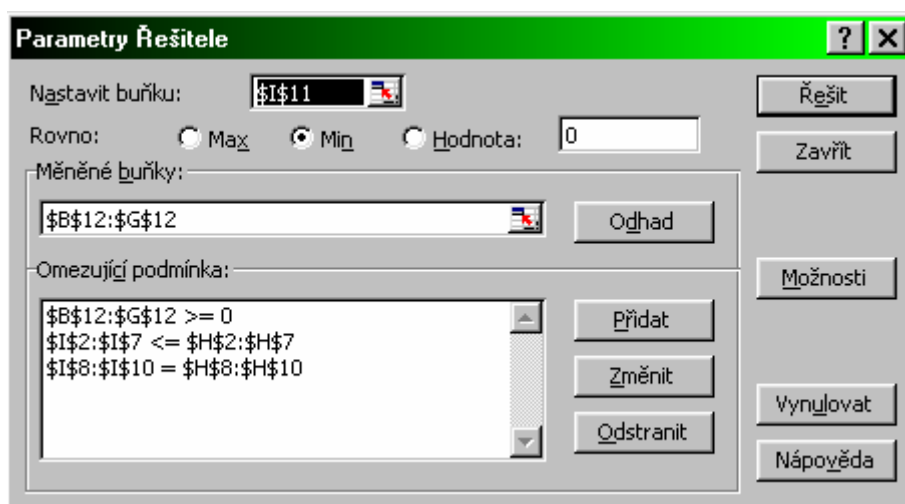
$$\text{\$B\$12:\$G\$12} \geq 0$$

2. Skutečná spotřeba času či materiálu musí být menší nebo rovna maximální spotřebě.

$$\text{\$I\$2:\$I\$7} \leq \text{\$H\$2:\$H\$7}$$

3. Vyrobené množství světlometů se musí shodovat s požadovaným množstvím.

$$\text{\$I\$8:\$I\$10} = \text{\$H\$8:\$H\$10}$$



Toto jsou všechny omezující podmínky nyní můžeme nechat počítač vyřešit danou problematiku. Po skončení výpočtu se do proměnlivých buněk B12, C12, D12, E12, F12 a G12 zapsalo optimální řešení a do buňky G8 celkové minimální náklady.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Světlomety FABIA I. čtvrt	Světlomety FABIA II. čtvrt	Světlomety OCTAVIA I. čtvrt	Světlomety OCTAVIA II. čtvrt	Světlomety SUPERB I. čtvrt	Světlomety SUPERB II. čtvrt	Maximální hodnota	Skutečná spotřeba
2	Spotřeba práce v I. čtvrt	3		3,5		4		40000	32500
3	Spotřeba práce v II. čtvrt		3		3,5		4	70000	70000
4	Spotřeba plastu v I. čtvrt	1		1,5		1,7		35000	12500
5	Spotřeba plastu v II. čtvrt	1	1	1,5	1,5	1,7	1,7	55000	41000
6	Spotřeba čírého plastu v I. čtvrt	0,5		0,7		0,9		6000	6000
7	Spotřeba čírého plastu v II. čtvrt	0,5	0,5	0,7	0,7	0,9	0,9	21000	20000
8	Požadavek na Světlomet Fabia (ks)	1	1					10000	10000
9	Požadavek na Světlomet Octavia (ks)			1	1			15000	15000
10	Požadavek na Světlomet Superb (ks)					1	1	5000	5000
11	Náklady (Kč)	1035,5	1200	1243,4	1700	1547,2	2000	Min	44517500
12	Optimální výroba	5000	5000	5000	10000	0	5000		

Optimální výrobní program vypočtený řešením výše formulovaného modelu definuje následující rozvržení výroby :

- v prvním čtvrtletí bude vyrobeno 5000 ks světlometů do Škody FABIE, 5000 ks světlometů do Škody OCTAVIE a dále 0 ks světlometů do Škody SUPERB
- ve druhém čtvrtletí bude vyroben pouze zbytek požadovaného počtu tj. 5000 ks světlometů do Škody FABIE, 10000 ks světlometů do Škody OCTAVIE a dále 5000 ks světlometů do Škody SUPERB
- hodnota účelové funkce, která představuje minimální objem celkových nákladů celé produkce, je rovna 44 517 500,- Kč.